



Física Geral e Experimental XX / Física Teórica II

1ª Prova – 1º semestre de 2010 - Prova C

INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

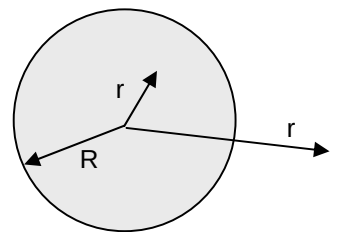
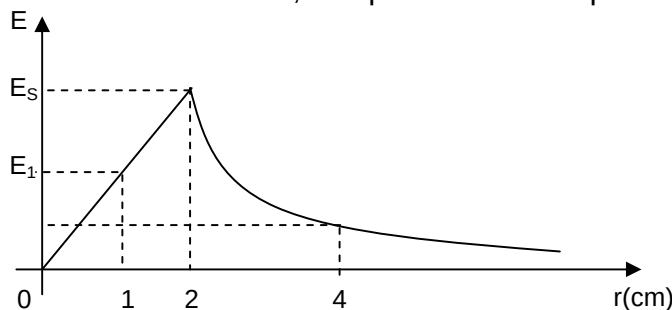
1ª QUESTÃO (2,5)

O gráfico abaixo representa o módulo do campo elétrico do lado de dentro e de fora de uma esfera com uma distribuição homogênea de cargas positivas em função da distância ao centro da esfera. No eixo vertical sabemos que $E_s = 6,0 \times 10^5 \text{ N/C}$.

a) (1,0) Use o valor do campo elétrico para $r=1\text{cm}$ e calcule a densidade de carga da esfera.

b) (0,5) Qual a carga total na esfera?

c) (1,0) Calcule, usando a lei de Gauss, a expressão do campo elétrico fora da esfera e seu valor para $r=4,0\text{cm}$.



GABARITO:

a) Pelo gráfico, a distância $r=1\text{cm}$ se encontra na reta entre 0 e 2cm, exatamente na metade da distância, assim: $E_1 = E_s/2 = 3,0 \times 10^5 \text{ N/C}$. Se a carga esfera está distribuída homogeneamente, por simetria, o campo elétrico é radial e possui o mesmo módulo a uma mesma distância do centro da esfera. Traçando uma gaussiana esférica concêntrica com a esfera carregada, em todos os pontos dela, o campo elétrico será paralelo ao vetor área e terá o mesmo módulo, assim:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{Interno}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Interno}}}{r^2}$$

mas Q_{Interno} é a carga dentro da gaussiana, assim $Q_{\text{Interno}} = \rho V_{\text{Gaussiana}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

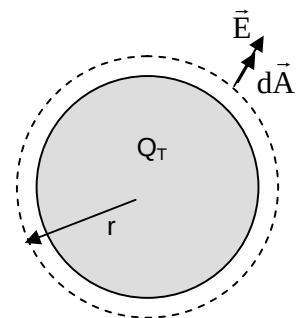
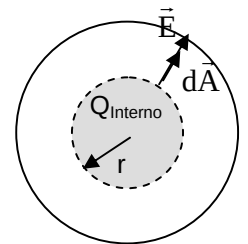
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \text{ para } r=1\text{cm} \quad \rho = \frac{E 3\epsilon_0}{r} = \frac{3,0 \cdot 10^5 \cdot 3,885 \cdot 10^{-12}}{0,01} = 7,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

b) Se sabemos a densidade de carga $Q_T = V_{\text{Esfera}} \rho = 7,9 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{4}{3} \cdot (0,02)^3 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

c) Usando o mesmo princípio de simetria do item a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{Interno}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Interno}}}{r^2}$$

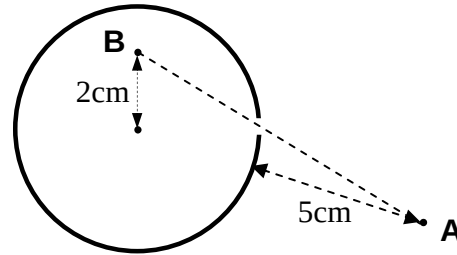
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{r^2} \quad \text{para } r=4\text{cm} \quad E(4\text{cm}) = 8,9 \cdot 10^9 \times 2,6 \cdot 10^{-8} / (0,04)^2 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$



2ª QUESTÃO) (2,5)

Considere uma casca esférica isolante de raio $r=5\text{cm}$, a qual está carregada uniformemente com densidade de carga $\rho = 4 \times 10^{-7} \text{ C/m}^3$. Há um pequeno furo na casca, o qual não altera de modo significativo o campo elétrico da mesma.

- a) (1,5) Calcule o potencial elétrico nos pontos A e B indicados na figura, tomando $V=0$ em pontos muito distantes (quando $r \rightarrow \infty$). JUSTIFIQUE sua resposta.
- b) (1,0) Um elétron se encontra no ponto A. Quanta energia você gasta (ou ganha) ao levá-lo de A até B pela trajetória indicada (atravessando o furo)?



GABARITO:

a) O potencial elétrico gerado por uma casca esférica carregada pode ser obtida se conhecemos o campo elétrico gerado por ela. Este campo elétrico pode ser calculado usando a lei de Gauss da seguinte forma:

Se a carga esfera está distribuída homogeneamente, por simetria, o campo elétrico é radial e possui o mesmo módulo a uma mesma distância do centro da esfera. Traçando uma gaussiana esférica concêntrica com a esfera carregada, em todos os pontos dela, o campo elétrico será paralelo ao vetor área e terá o mesmo módulo, assim:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interno}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{interno}}}{r^2}, \text{ mas para pontos}$$

fora da esfera a carga interna é a carga total da casca, assim, $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{r^2}$

A relação entre a diferença de potencial em dois pontos do espaço e o campo elétrico nesta região é

$V_B - V_A = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Considerando o potencial no infinito zero para calculando a diferença de potencial entre o

infinito e um ponto r qualquer teremos o potencial em r , assim: $V(r) - V_\infty = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r E \cdot dr = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{r^2} \cdot dr$

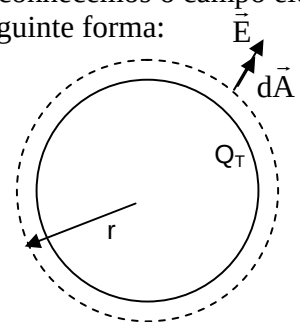
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{r}. \text{ Para o ponto A } V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Esfera}}}{r} = 8,9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,05^2}{0,1} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ V}$$

No ponto B o campo elétrico é zero, porque se traçarmos uma gaussiana da mesma forma que fizemos a carga

interna será zero, então $V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Esfera}}}{R} = 8,9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,05^2}{0,05} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ V}$

b) O trabalho de uma força externa para levar uma carga q sob a ação de um campo potencial V é dado por:

$W_{A \rightarrow B} = q(V_B - V_A)$, no nosso caso $W_{A \rightarrow B} = -e(V_B - V_A) = -1,6 \cdot 10^{-19} (2,2 \cdot 10^3 - 1,1 \cdot 10^3) = -1,7 \cdot 10^{-16} \text{ J}$.



3ª QUESTÃO) (2,5)

Um anel isolante delgado é carregado com uma carga $+Q$, homogêneamente distribuída, como mostra a figura.

- a) (1,0) Determine a expressão para o potencial gerado pelo anel em pontos ao longo de seu eixo de simetria.
b) (1,5) Sabendo o potencial do anel, calcule o campo elétrico ao longo do eixo usando-o para isto.

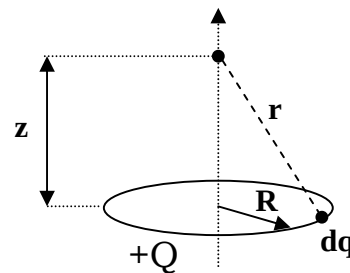
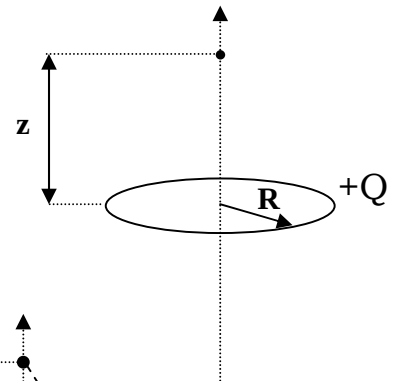
GABARITO:

a) A uma distância z do eixo de simetria do anel, o potencial gerado por uma pequena carga dq do anel é dado por:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

mas para todos os dq r é constante, assim:

$$V(z) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



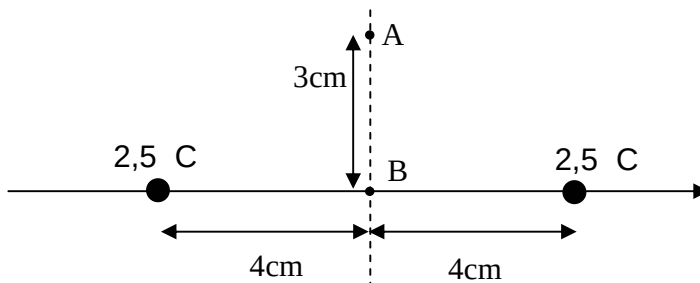
- c) Sabemos que o potencial do anel $V_T(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$. Como este só depende da variável z só teremos a

componente z do campo elétrico, e esta será dada por $E_z(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

4ª QUESTÃO) (2,5)

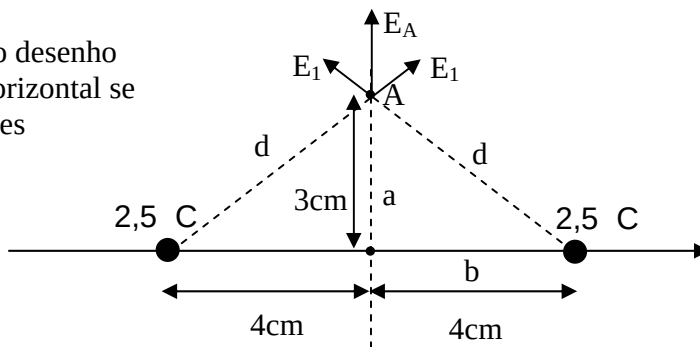
Duas cargas de módulo 2,5 C são fixas separadas por uma distância de 8cm, conforme a figura.

- (1,0) Qual o módulo do campo elétrico nos pontos A e B?
- (0,8) Qual o valor do potencial nos pontos A e B, considerando o potencial no infinito igual a zero?
- (0,7) Qual é o trabalho para levar uma terceira carga de módulo 2,0 C do infinito até A e de A até B ?



a) No ponto B o campo elétrico é zero, pois o módulo do campo gerado por cada carga é o mesmo e estão em sentidos opostos.

No ponto A, cada um gera um campo conforme o desenho o campo total será vertical, pois a componente horizontal se anula. O campo será a soma das duas componentes verticais, assim:



$$E_A = 2E_1 \cos \theta = 2k \frac{q}{d^2} \frac{a}{d} = 2 \cdot 8,9 \cdot 10^9 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,03}{(0,03^2 + 0,04^2)^{3/2}} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ N/C}$$

b) O potencial total é a soma do potencial de cada carga pontual, assim:

$$V_A = 2k \frac{q}{d} = 2 \cdot 8,9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{0,05} = 8,9 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$V_B = 2k \frac{q}{b} = 2 \cdot 8,9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{0,04} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ V}$$

c) O trabalho de uma força externa para levar uma carga q sob a ação de um campo potencial V é dado por:

$W_{A \rightarrow B} = q(V_B - V_A)$. Para levar do infinito até A, referenciando o potencial no infinito como zero, teremos:

$$W_A = q V_A = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 8,9 \cdot 10^5 = 1,8 \text{ J.}$$

$$\text{Para levar de A até B, teremos: } W_{A \rightarrow B} = q(V_B - V_A) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot (1,1 \cdot 10^6 - 8,9 \cdot 10^5) = 4,2 \text{ J}$$